

Logaritmo (log): é uma forma diferente de expressar uma relação exponencial entre números. Por exemplo, $2^3 = 8$, pode ser escrito como $\log_2 8 = 3$ (que se lê: “log de 8 na base 2 é igual a 3”), as nomenclaturas são:

8 é o logaritmando ou antilogaritmo;

2 é a base;

3 é o logaritmo.

Exemplos: calcule o valor de x em:

$$1) \log_5 25 = x \quad 2) \log_2 0,5 = x \quad 3) \log_2 x = 5 \quad 4) \log_x 16 = 2 \quad 5) x = \log_4 16$$

Condição de existência: para que exista o logaritmo de $\log_b a$, devemos ter: **a e b maiores que zero e b diferente de 1.**

$$b > 0, b \neq 1 \text{ e } a > 0$$

Ou seja, a base de um logaritmo pode ser qualquer número maior que zero, exceto o 1. E o logaritmando deve ser positivo.

Justificativas: Se $b = 0$, $\log_0 5 = 2 \leftrightarrow 0^2 = 5$ absurdo!

Se $b = 1$, $\log_1 7 = 5 \leftrightarrow 1^5 = 7$ absurdo!

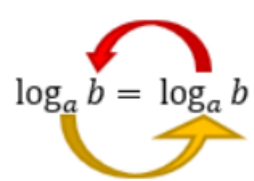
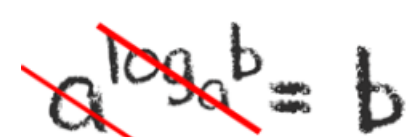
Se $b < 0$, $\log_{-3} 4 = 81 \leftrightarrow -3^4 = 81$ absurdo!

Se $a = 0$, $\log_3 0 = 4 \leftrightarrow 3^4 = 0$ absurdo!

Se $a < 0$, $\log_{-2} 16 = 4 \leftrightarrow -2^4 = 16$ absurdo!

Consequências da condição de existência de logaritmos: a partir da definição de logaritmo, podemos estabelecer as seguintes situações:

I) $b^{\log_b N} = N$. Se o expoente de uma potência for um logaritmo, e o valor da base desse logaritmo for igual ao da base da potência, então o resultado será o próprio logaritmando.

Justificativa: $\log_a b = \log_a b$  $\log_a b = \log_a b$ $a^{\log_a b} = b$	Dica:  Podemos cortar ou cancelar, o valor da base da potência com o logaritmo e sua base, e nos restará apenas o logaritmando. Matematicamente, esse cancelamento não faz sentido algum. Isso é apenas uma técnica que utilizamos para lembrar que em casos como esse, o resultado é o próprio logaritmando do logaritmo.
---	---

II) Se $\log_b N = \log_b P$ então $N = P$. Quando dois logaritmos com a mesma base são iguais, os logaritmandos também serão iguais.

Exemplos: calcule os logaritmos.

$$1) \log_9 1 = x \quad 2) \log_5 5 = x \quad 3) \log_3 3^5 = x \quad 4) 2^{\log_2 3} = x \quad 5) 5^{\log_5 8} = x \quad 6) \log_2 (x-3) = \log_2 3$$

Resoluções:

1) $x = 0$, pois $\log_9 1 = 0$, logo $9^0 = 1$.

2) $x = 1$, pois $\log_5 5 = 1$, logo $5^1 = 5$

3) $x = 5$, pois $\log_3 3^5 = 5$.

4) $x = 3$, pois $2^{\log_2 3} = 3$

5) $x = 8$, pois $5^{\log_5 8} = 8$

6) $x = 6$, pois:

$$\log_2(x - 3) = \log_2 3$$

$$x - 3 = 3$$

$$x = 3 + 3$$

$$x = 6$$

Sistema de logaritmos decimais: é o sistema de base 10, quando aparecer um logaritmo sem a identificação da base, devemos entender como sendo base 10.

$$\log_{10} x = \log x$$

Ou seja: $\log_{10} 2 = \log 2$ $\log_{10} 5 = \log 5$ $\log_{10} 7 = \log 7$

Exemplos: calcule:

1) $\log 1000 = x$

2) $\log 0,01$

Obs.: podemos acrescentar o sinal de igual e o x , quando não aparecer no exercício.

Exercícios da aula:

1) Calcule x :

a) $\log_5 25 = x$ b) $\log 1000 = x$ c) $\log_2 2 = x$ d) $\log_2 1/4 = x$ e) $\log_{1/2} 8 = x$ f) $\log_2 1 = x$
g) $\log_{10} 0,1 = x$ h) $\log_{1/9} 3\sqrt{3} = x$ i) $\log_3 81 = x$ j) $\log_{1/2} 32 = x$ k) $\log_8 1 = x$ l) $\log_{\sqrt{5}} 5 = x$
m) $\log_{\sqrt{3}} 9 = x$ n) $\log_2 128 = x$ o) $\log_3 27 = x$ p) $\log_5 125 = x$ q) $\log_{10} 000 = x$ r) $\log_{1/2} 64 = x$

2) Usando a definição, calcule:

a) $\log_{10} 0,01$ b) $\log_2 0,5$ c) $\log_2 \sqrt{8}$ d) $\log_4 \sqrt{32}$ e) $\log_{1/4} 16$ f) $\log_{2/3} 8/27$ g) $\log_2 0,25$
h) $\log_7 7$ i) $\log_4 1$ j) $\log_{1/5} 1/5$

3) Determine o valor da base x nas seguintes igualdades:

a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_x 5 = 1$ d) $\log_x 36 = 2$ e) $\log_x 4 = -2$ f) $\log_x 16 = 2$
g) $\log_x 1/16 = 2$ h) $\log_x 25 = 2$ i) $\log_x 10 = 1$

4) Calcule x nas igualdades:

a) $\log_2 x = 5$ b) $3 = \log_4 x$ c) $\log(x+1) = 2$ d) $\log_x 27 = 3$ e) $-1 = \log_3 x$ f) $\log x = 0$

5) Obtenha os valores dos logaritmos:

a) $\log_{0,1} 10 = x$ b) $\log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{1}{9}\right) = x$ c) $\log_{\sqrt{2}} 8 = x$ d) $\log_4 \sqrt[3]{16} = x$ e) $\log_2 8 = x - 5$
f) $\log_4 32 = 2x + 1$ g) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x + 2$

6) Resolva as seguintes equações:

a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_{16} x = \frac{1}{2}$ c) $\log_3(x - 1) = 1$ d) $\log_x 4 = 2$ e) $\log_{2x} 4 = 2$
f) $\log_x 27 = 3$ g) $\log_x(2x^2 - 3x + 2) = 0$

Respostas: 1)a)2 b)3 c)1 d)-2 e)-3 f)0 g)-1 h)-3/4 i)4 j)-5 k)0 l)2 m)4 n)7 o)3
p)3 q)4 r)-6 2)a)-2 b)-1 c)3/2 d)5/4 e)-2 f)3 g)-2 h)1 i)0 j)1 3)a)2 b)3 c)5 d)6
e)1/2 f)4 g)1/4 h)5 i)10 4)a)32 b)64 c)99 d)3 e)1/3 f)1 5)a)x=-1 b)x=2 c)x=6

d) $x=2/3$ e) $x=8$ f) $x=3/4$ g) $x=-5$ 6)a) $x=81$ b) $x=4$ c) $x=4$ d) $x=2$ pela condição de existência, -2 não é solução. e) $x=1$, pela condição de existência, -1 não é solução. f) $x=3$ g) $x=1/2$, pela condição de existência, 1 não é solução.

Cologaritmo (colog): é o nome que se dá ao oposto do logaritmo, isto é:

$$\text{colog}_a x = -\log_a x$$

Exemplos: calcule:

$$1) \text{colog}_2 8 = -\log_2 8 = -3 \quad 2) \text{colog} 100 = -\log 100 = -2$$

Propriedades dos Logaritmos

As propriedades dos logaritmos são propriedades operatórias que simplificam os cálculos dos logaritmos, principalmente quando as bases não são iguais.

1ª propriedade - Logaritmo do Produto: o logaritmo do produto de dois ou mais números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números..

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Exemplos:

$$1) \text{ Calcule: } \log_2 (8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$$

$$2) \text{ Calcule: } \log 2 + \log 5 = \log (2 \cdot 5) = \log 10 = 1$$

2ª propriedade - Logaritmo do Quociente: o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

$$\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$$

Exemplos:

$$1) \text{ Calcule: } \log_2 \left(\frac{4}{32} \right) = \log_2 4 - \log_2 32 = 2 - 5 = -3$$

$$2) \text{ Calcule: } \log_2 1024 - \log_2 64 = \log_2 \left(\frac{1024}{64} \right) = \log_2 16 = 4$$

3ª propriedade - Logaritmo da Potência: o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Exemplos:

$$1) \text{ Calcule: } \log 100^3 = 3 \log 100 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$2) \text{ Obtenha o valor de x em: } 2/3 \cdot \log_x 27 = 1 \rightarrow 2/3 \cdot \log_x 3^3 = 1 \rightarrow \log_x (3^3)^{2/3} = 1 \rightarrow \log_x 3^2 = 1 \rightarrow x = 9.$$

4ª propriedade – Mudança de base: para aplicar as propriedades anteriores é necessário que todos os logaritmos da expressão estejam na mesma base. Neste caso é necessário transformar todos para uma mesma base. A mudança de base também é muito útil quando precisamos usar a calculadora para encontrar o valor de um logaritmo que está em uma base diferente de 10 (calculadoras científicas só resolvem log na base 10). fazendo a mudança de base podemos transformar um logaritmo em um quociente de logaritmos, para fazer essas transformações é preciso obedecer algumas regras e propriedades operatórias como por exemplo, quando temos o valor de $\log_b N$, mas queremos obter o valor de $\log_a N$, com $a \neq b$, usamos a relação:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \text{ (mudamos a base dada "a" para "b")}$$

Exemplos:

$$1) \text{ Mude a base do log de 7 para 5:}$$

$$a) \log_7 8 \quad b) \log_7 2$$

$$2) \text{ Mude a base dos log de 3 para 2:}$$

$$a) \log_3 8 \quad b) \log_3 2$$

3) Calcular $\log_4 8$:

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

Exemplos envolvendo as 4 propriedades:

1) Usando a primeira propriedade, calcule: $\log_5 x + \log_5 2 = 2$

2) Usando as propriedades dos logaritmos, calcule:

a) $\log_2(8 \cdot 16)$ b) $\log_2 + \log_5$ c) $\log_2 4/32$ d) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ e) $\log_4 8$ f) $\log_8 16$

3) Simplificar $\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 2$:

4) Resolver a equação $\log_{100} x + \log_{10} x = 3$

5) Usando as propriedades, calcule x em:

b) $\log_7 8 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 5$ c) $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$

6) Usando as propriedades, calcule x em: $2/3 \cdot \log_x 27 + 2 \cdot \log_x 2 - \log_x 3 = -1$

Respostas: 1) $25/2$ 2) a) 7 b) 1 c) -3 d) $2/3$ e) $3/2$ f) $4/3$ 3) 1 4) 100 5) a) 3 b) 2 6) $1/12$

Logaritmo natural (neperiano): o sistema de logaritmos neperianos ou logaritmo natural, recebe esse nome em homenagem ao seu criador John Nepper. A base desse logaritmo é o número “e”, um número irracional, cujo valor é 2,71828...

Podemos escrever esse logaritmo como $\text{Log}_e R$ ou podemos omitir a base e, escrevendo $\ln R$. Nesse caso, já sabemos que se trata de um logaritmo neperiano de R, ou simplesmente, logaritmo de R na base “e”. Ao representar um logaritmo natural há o costume de escrever $\ln(x)$ em vez de $\log_e(x)$.

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$\text{Ou seja: } \log_e 2 = \ln 2 \quad \log_e 5 = \ln 5 \quad \log_e 7 = \ln 7$$

OBS.: **As propriedades para $\ln$, são as mesmas dos $\log$.**

Exemplos:

1) Resolva a equação $e^{5x} = 2$, dado: $\ln 2 \cong 0,7$.

Solução:

$$e^{5x} = 2$$

Aplicando logaritmo natural nos dois lados da equação dada, temos:

$$\ln e^{5x} = \ln 2$$

Usando a propriedade no lado esquerdo da equação e substituindo $\ln 2$, temos:

$$5x \ln e \cong 0,7$$

Trocando $\ln e$ por $\log_e e$ temos:

$$5x \cdot 1 \cong 0,7$$

Repare que $\ln e = \log_e e = 1$. Calculando, temos:

$$x \cong \frac{0,7}{5} \cong \frac{7}{50}$$

2) Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$, dado: $\ln 10 \cong 2,3$.

Solução:

$$e^{5-3x} = 10 \Rightarrow \ln(e^{5-3x}) = \ln(10)$$

$$\ln(e^{5-3x}) = 2,3 \Rightarrow (5 - 3x) \cdot \ln(e) = 2,3 \Rightarrow 5 - 3x = 2,3 \Rightarrow$$

$$3x = 5 - 2,3 \Rightarrow x = \frac{2,7}{3} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

Exercícios da aula:

1) Dado: $\ln 2 \cong 0,7$ e $\ln 10 \cong 2,3$, resolva as equações:

a) $10^{3x} = 2$

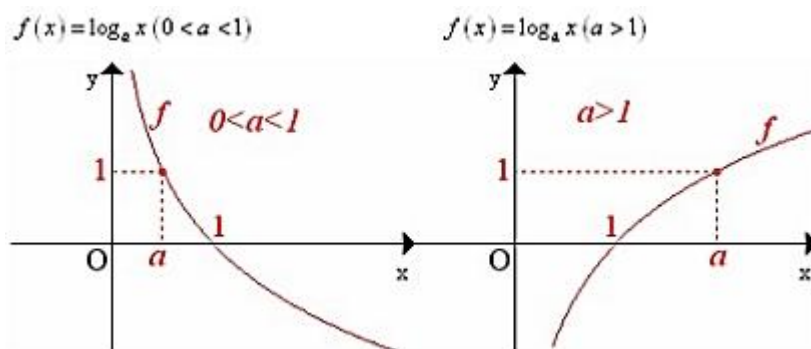
b) $8 = e^{x^2}$

c) $10^{(x-4)} = 8$

Respostas: 1) a) $\frac{7}{69}$ b) $\sqrt{\frac{21}{10}}$ c) $\frac{113}{23}$

Função Logarítmica

Função logarítmica: denomina-se função logarítmica de base a , a função f real dada por $f(x) = \log_a x$ (com $a \neq 1$, $a > 0$ e $x > 0$). Com relação ao seu gráfico, quando $a > 1$, temos uma função logarítmica crescente e quando $0 < a < 1$, temos uma função logarítmica decrescente.



Observação: A função logarítmica é a inversa da exponencial.

Aplicações da Função Logarítmica

1) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático $h(t) = 1,5 + \log_3(t+1)$, com $h(t)$ em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

2) Uma das grandezas relacionadas ao som é a sua altura A , medida em decibéis (dB). A altura de um som está relacionada com a sua intensidade I , medida em watts por metro quadrado, através da função $A(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, sendo I_0 uma constante que vale $10^{-12} \frac{W}{m^2}$. Sabe-se que a intensidade sonora aproximada de um carro é $10^{-4} \frac{W}{m^2}$. Portanto, pode-se afirmar que a altura do som produzido pelo carro é igual a:

3) A Escala Richter é uma função logarítmica utilizada para medir a magnitude dos abalos sísmicos, ou seja, dos terremotos. A magnitude de um terremoto pode ser calculada pela equação logarítmica $M = \log_{10} (A \cdot f) + 3,30$, onde M = Magnitude do terremoto na escala Richter; A = Amplitude do movimento da onda registrada no sismógrafo. f = frequência da onda, em hertz. Diante das informações acima, suponhamos que um terremoto teve como amplitude 1000 micrometros e frequência igual a 0,1Hz. Qual a magnitude deste terremoto?

4) Muito utilizado na química, a escala de pH (sigla para potencial hidrogeniônico), fornece medidas entre 0 a 14, substâncias que apresentam pH abaixo de 7 são denominadas ácidas, enquanto que substâncias com valores de pH acima de 7 são alcalinas, o pH 7 é neutro. O pH é o log negativo de base 10 da concentração molar de íons de hidrogênio (H^+), ou seja:

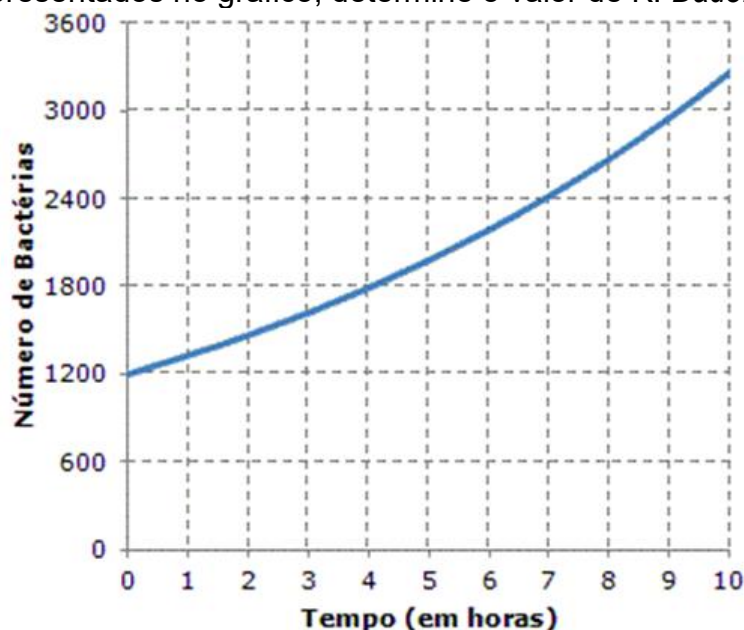
$$pH = -\log (H^+)$$

Sabendo que a concentração molar por litro do suco gástrico é 10^{-1} mol/l, qual é o seu pH?

5) (FUVEST) O químico Sørensen definiu o pH (potencial hidrogeniônico) de uma solução do seguinte modo $pH = -\log [H^+]$, onde H^+ é a concentração em íon-grama de hidrogênio por litro de solução. Para o $pH < 7$ a solução é ácida, para $pH = 7$ a solução é neutra e para $pH > 7$ e, teoricamente menor que 14, a solução é básica. Numa amostra de leite de magnésia (que é essencialmente uma suspensão de hidróxido de magnésio $Mg(OH)_2$ em água) obteve-se a concentração hidrogeniônica $H^+ = 3,3 \cdot 10^{-11}$. Determine o pH dessa amostra de leite de magnésia. Dados: $\log 3,3 = 0,52$ e $pH = -\log (H^+)$.

6) O número A de associados de um clube, aumenta segundo a função $A = 9 \cdot e^{0,1t}$, onde t é o tempo em anos após a inauguração do clube. A quantidade de associados atingirá 9 mil pessoas daqui a quantos anos? Dado: $\ln 10 \cong 2,3$.

7) Uma cultura de bactérias cresce segundo a função $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$, onde C e K são constantes, N é o número de bactérias presentes na cultura, t é o tempo em horas e C é o valor inicial. Utilizando os dados apresentados no gráfico, determine o valor de K . Dado: $\ln(1,5) = 0,4$.



8) A quantidade $Q(t)$, em gramas, de uma substância radiotiva, diminui segundo a função $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0,07 \cdot t}$, onde, t é o tempo em horas e Q_0 é a quantidade inicial, em gramas. Determine o tempo para que a quantidade inicial desta substância seja reduzida pela metade. Dado: $\ln 2 \cong 0,7$.

Respostas: 1)8 2)80 3)5,3 graus 4)1 5)pH = 10,48 6)69 anos 7)K = 0,1 8)10 anos